УДК 539.3

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНЫХ НОРМАЛЬНОЙ И СКРУЧИВАЮЩЕЙ НАГРУЗОК НА ТОННЕЛЬ С КРУГОВОЙ КРЕПЬЮ

В.Н. Украинец

Павлодарский государственный университет
E-mail: vitaliyu@list.ru

Получено решение задачи о воздействии подвижных нормальной и скручивающей нагрузок на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку, находящуюся в упругом инерционном полупространстве. Полагается, что функции нагрузок могут быть разложены в ряд Фурье по угловой координате и интеграл Фурье по осевой координате. Движение оболочки описывается классическими уравнениями теории тонких оболочек, а упругого полупространства – динамическими уравнениями теории упругости в потенциалах Ламе, для решения которых используется метод интегрального преобразования Фурье. Настоящая задача является модельной для расчёта напряжённо-деформированного состояния массива пород при неравенстве динамических нагрузок, передаваемых на каждый из рельсов, уложенных в тоннеле цилиндрической формы, или при вращательном движении очистных устройств в подземном трубопроводе.

1. Задача о действии подвижной осесимметричной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде рассматривалась в работе [1]. Движение периодической нагрузки вдоль цилиндрической полости в упругом полупространстве изучалось в [2].

Аналогично [2] рассмотрим бесконечную круговую цилиндрическую полость радиуса R расположенную в упругом, однородном и изотропном полупространстве с параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ. В отличие от [2] полость подкреплена тонкой упругой оболочкой (в силу малости толщины оболочки полагаем, что окружающая среда контактирует с оболочкой вдоль её срединной поверхности) по внутренней поверхности которой с постоянноё скоростью c поступательно движутся апериодические нормальная и тангенциальная (скручивающая) нагрузки. Введём декартовую систему координат, ось Z которой совпадает с осью полости, параллельной свободной от нагрузок плоской границе полупространства, а ось X перпендикулярна к этой границе: $x\leq h$, где h – расстояние от оси полости до границы полупространства.

Вследствие того, что рассматривается установившийся процесс можно перейти к подвижной декартовой (X, Y, $\eta=Z-ct$) или цилиндрической (r, θ, $\eta=Z-ct$) системе координат.

В подвижной системе координат для описания движения оболочки воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек (1), а для описания движения окружающей среды – динамическими уравнениями теории упругости (2):

$$\left[1-\frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0}\right]\frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial\eta^2}+\frac{1-\nu_0}{2R^2}\frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{1+\nu_0}{2R}\frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial\eta\partial\theta}+\frac{\nu_0}{R}\frac{\partial u_{0r}}{\partial\eta}=-\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0}q_\eta,$$

$$\frac{1+\nu_0}{2R}\frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial\eta\partial\theta}+\frac{(1-\nu_0)}{2}\left(1-\frac{\rho_0 c^2}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial\eta^2}+$$

$$+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial u_{0r}}{\partial\theta}=\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0}(P_\theta-q_\theta),$$

$$\frac{\nu_0}{R}\frac{\partial u_{0\eta}}{\partial\eta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial u_{0\theta}}{\partial\theta}+\frac{h_0^2}{12}\nabla^2\nabla^2 u_{0r}+$$

$$+\frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0}\frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial\eta^2}+\frac{u_{0r}}{R^2}=-\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0}(P_r-q_r),\quad(1)$$

где $u_{0\eta}$, $u_{0\theta}$, u_{0r} – перемещения точек срединной поверхности оболочки; q_η, q_θ, q_r – составляющие реакции окружающей оболочку среды (при $r=R$ $q_\eta=\sigma_{r\eta}$, $q_\theta=\sigma_{r\theta}$, $q_r=\sigma_{rr}$, где σ_{rj} – компоненты тензора напряжений в среде, $j=\eta$, θ, r); ν_0, μ_0, ρ_0 – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материала оболочки, h_0 – её толщина; $P_\theta(\theta,\eta)$, $P_r(\theta,\eta)$ – соответственно интенсивность скручивающей и нормальной нагрузки;

$$\left(\frac{1}{M_p^2}-\frac{1}{M_s^2}\right)\text{grad div}\,\boldsymbol{u}+\frac{1}{M_s^2}\nabla^2\boldsymbol{u}=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\eta^2},\qquad(2)$$

где $\boldsymbol{u}$ – вектор смещения упругой среды; $M_p=c/c_p$, $M_s=c/c_s$ – числа Маха; c_p, c_s – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при $x=h$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xy}=\sigma_{x\eta}=0.\qquad(3)$$

В случае жёсткого сцепления оболочки с окружающей средой

$$u_j\Big|_{r=R}=u_{0j},\quad j=\eta,\theta,r.\qquad(4)$$

Здесь u_r, u_θ, u_η – компоненты вектора $\boldsymbol{u}$.

Выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе [3] $\boldsymbol{u}=\text{grad}\varphi_1+\text{rot}(\varphi_2\boldsymbol{e}_\eta)+\text{rot rot}(\varphi_3\boldsymbol{e}_\eta)$, преобразуем (2) к виду

$$\nabla^2\varphi_j=M_j^2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\eta^2},\ j=1,2,3,\qquad(5)$$

где $M_1=M_p$, $M_2=M_3=M_s$.

Применив к (5) преобразование Фурье по η, находим

$$\nabla_2^2\varphi_j^*-m_j^2\xi^2\varphi_j^*=0,\ \ j=1,2,3.\qquad(6)$$

Здесь $m_j^2 = 1 - M_j^2,\ m_1 \equiv m_p,\ m_2 = m_3 \equiv m_s$,

$$\varphi_j^*(r,\theta,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(r,\theta,\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta.$$

Представив компоненты напряжённо-деформированного состояния среды через потенциалы Ламе и применив преобразование Фурье по η, можно получить выражения для трансформант перемещений u_i^* и напряжений σ_{ij}^* в декартовой ($i=x,y,\eta$, $j=x,y,\eta$) и цилиндрической ($i=r,\theta,\eta$, $j=r,\theta,\eta$) системах координат как функции от φ_j^*.

Предположим, что скорость нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей полость среде. В этом случае $M_s<1$ ($m_2=m_3=m_s>0$), и решения уравнений (6) можно представить в виде

$$\varphi_j^* = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \qquad (7)$$

где $$\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta},$$

$$\Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi,\zeta) \exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2})\, d\zeta.$$

Здесь $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = m_j\xi$, $g_j(\xi,\eta)$; a_{nj} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [4], представление потенциалов в форме (7) приводит к следующим выражениям для трансформант потенциалов в декартовой системе координат:

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + g_j(\xi,\zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (8)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2},\ \Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_j} \right)^n,\ j = 1, 2, 3.$

Воспользуемся переписанными для трансформант граничными условиями (3), с учётом (8). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнивая, в силу произвольности y, их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем $g_j(\xi,\zeta)$ через коэффициенты a_{nj}:

$$g_j(\xi,\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk}\Phi_{nk}. \qquad (9)$$

Вид определителя Δ и алгебраических дополнений Δ_{jk} определён в [4]. Там же показано, что Δ – определитель Релея, который не обращается в ноль, если скорость бегущей нагрузки меньше скорости релеевской волны в упругом полупространстве. В этом случае условия существования преобразования Фурье выполняются, и для вычислений интегралов (8) можно воспользоваться одним из численных методов интегрирования, предварительно определив коэффициенты a_{nj}.

Для дорелеевской скорости движущейся нагрузки соотношения (8) перепишутся в виде

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \dfrac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj}\Phi_{nj} + \\ + e^{(x-h)f_j} \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\Delta_{jk}}{\Delta} e^{-hf_k} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_{nk}\Phi_{nk} \end{array} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (10)$$

Для представления φ_j^* (7) в цилиндрической системе координат воспользуемся разложением $e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta}$. Находим, что

$$\exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k^2}) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(kr) e^{in\theta} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k^2}}{k} \right)^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k^2}}.$$

Тогда

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_j r) + I_n(k_j r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi,\zeta)\, \Phi_{nj}\, e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (9) $g_j(\xi,\zeta)$, имеем

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta}, \qquad (11)$$

где

$$b_{nj} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mk} A_{nj}^{mk},\ A_{nj}^{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \Phi_{mk} \Phi_{nj} e^{-h(f_k + f_j)} d\zeta.$$

Подставляя (10) и (11) соответственно в выражения для трансформант напряжённо-деформированного состояния (НДС) среды в декартовых и цилиндрических координатах, получим новые выражения, где неизвестными будут только коэффициенты a_{nj}. Для определения последних воспользуемся граничными условиями (4), представив их в виде

$$u_j^*\big|_{r=R} = u_{0j}^*,\ j = \eta, \theta, r, \qquad (12)$$

где $u_{0j}^*(\theta,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{0j}(\theta,\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta.$

Применяя к (1) преобразование Фурье по η и разложив функции перемещений точек срединной поверхности оболочки и нагрузку в ряды Фурье по θ, для n-го члена разложения получим:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_2 n\xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_0\xi_0 u_{0nr} = -G_0 q_{n\eta}, \\ &\nu_2 n\xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2inu_{0nr} = G_0(P_{n\theta} - q_{n\theta}), \qquad (13) \\ &2i\nu_0\xi_0 u_{0n\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} = G_0(P_{nr} - q_{nr}), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1^2 = \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2,\quad \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2,\quad \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2,$

$$\varepsilon_0^2 = \nu_1\xi_0^2 M_{s0}^2,\quad \xi_0 = \xi R,\quad \alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + \nu_1 n^2,$$

$$\xi_0 = \xi R,\quad \beta_0^2 = \nu_1\xi_0^2 + 2n^2,\quad \gamma_0^2 = \chi^2(\xi_0^2 + n^2)^2 + 2,$$

$$\nu_1 = 1 - \nu_0,\ \nu_2 = 1 + \nu_0,\ M_{s0} = \frac{c}{c_{s0}},$$

$$c_{s0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}},\ \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2},\ G_0 = -\frac{\nu_1 R^2}{\mu_0 h_0};$$

u_{0nm}, P_{nj} – соответственно коэффициенты разложения $u^*_{0m}(\theta,\xi)$ и $P_j^*(\theta,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} P_j(\theta,\eta)e^{-i\xi\eta}d\eta$ в ряды Фурье по угловой координате θ (j=θ; r; m=η; θ; r). При r=R $q_{n\eta}=(\sigma^*_{r\eta})_n$, $q_{n\theta}=(\sigma^*_{r\theta})_n$, $q_{nr}=(\sigma^*_{rr})_n$.

Разрешая (13) относительно $u_{0n\eta}$, $u_{0n\theta}$, u_{0nr}, находим

$$u_{0n\eta}=G_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\delta_{\eta j}}{\delta_n}(P_{nj}-q_{nj}),$$
$$u_{0n\theta}=G_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\delta_{\theta j}}{\delta_n}(P_{nj}-q_{nj}),\qquad (14)$$
$$u_{0nr}=G_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\delta_{rj}}{\delta_n}(P_{nj}-q_{nj}).$$

Здесь $\delta_n=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)^2-(\varepsilon_1\xi_1)^2-(\varepsilon_2\xi_2)^2+2\xi_1\xi_2\xi_3$,

$$\delta_{\eta 1}=(\varepsilon_2\varepsilon_3)^2-\xi_1^2,\ \delta_{\eta 2}=D_1,$$
$$\delta_{\eta 3}=iD_2,\ \delta_{\theta 1}=D_1,\ \delta_{\theta 2}=(\varepsilon_1\varepsilon_3)^2-\xi_2^2,\ \delta_{\theta 3}=$$
$$=iD_3,\ \delta_{r1}=-iD_2,\ \delta_{r2}=-iD_3,$$
$$\delta_{r3}=(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2-\xi_3^2,\ \xi_1=2n,\ \xi_2=2\nu_0\xi_0,\ \xi_3=$$
$$=\nu_2\xi_0 n,\ D_1=\xi_0 n(4\nu_0-\varepsilon_3^2\nu_2),$$
$$D_2=2\xi_0(\varepsilon_2^2\nu_0-n^2\nu_2),\ D_3=2n(\varepsilon_1^2-\xi_0^2\nu_0\nu_2);$$

P_{n1}=0, P_{n2}=$P_{n\theta}$, P_{n3}=P_{nr}; для q_{nj} индекс j=1 соответствует индексу η, j=2–θ, j=3–r.

Подставляя (14) в (12) и приравнивая коэффициенты рядов Фурье-Бесселя при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{nj}.

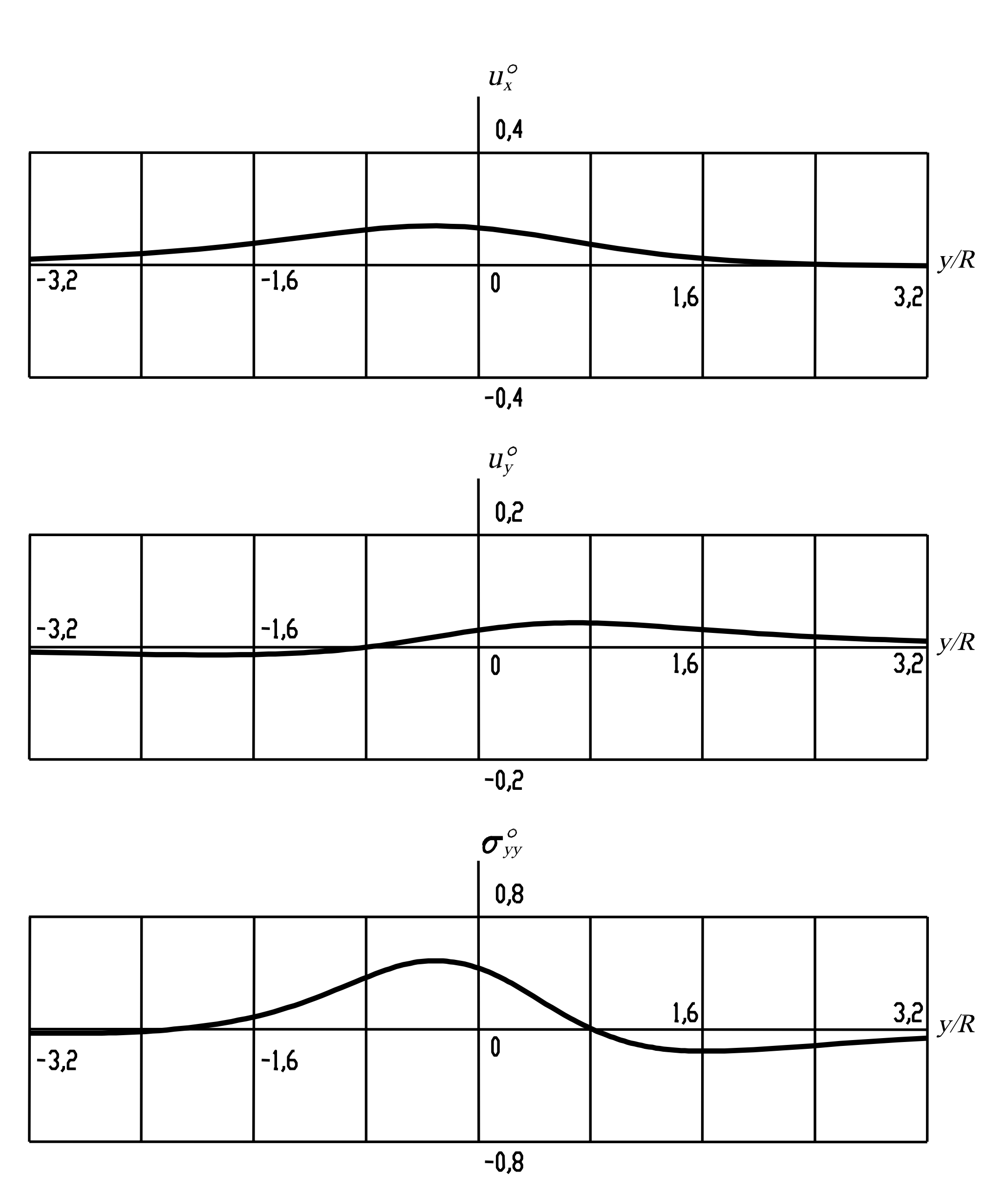


Рисунок. *Изменения компонент НДС земной поверхности*

После определения коэффициентов a_{nj}, используя обратное преобразование Фурье, можно вычислить компоненты НДС среды в декартовой и цилиндрической системах координат. При этом для вычисления интегралов Фурье можно использовать любой численный метод, если определитель полученной из граничных условий системы уравнений не обращается в ноль.

2. В качестве примера расчёты проводились для равномерно распределённых в интервале $|\eta|\leq 0{,}2$ м по внутренней поверхности бетонной оболочки осесимметричных нормальной и скручивающей нагрузок одинаковой интенсивности, движущихся со скоростью c=100 м/с в массиве алевролита при следующих значениях параметров: R=1 м, h=2 м, h_0=0,02 м; ν_0=0,2, μ_0=12,1·10^3 МПа, ρ_0=2,5·10^3 кг/м^3, λ=1,688·10^3 МПа, μ=2,532·10^3 МПа, ρ=2,5·10^3 кг/м^3. Интенсивность нормальной нагрузки выбиралась таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине участка нагружения равнялась сосредоточенной нормальной кольцевой нагрузке p.

На рисунке показан результат воздействия нагрузок на земную поверхность, где в поперечной плоскости (η=0) приведены кривые изменения перемещений $u^\circ_x=u_x\mu/p$ (м), $u^\circ_y=u_y\mu/p$ (м) и нормальных напряжений $\sigma^\circ_{yy}=\sigma_{yy}/p$.

Как следует из анализа поведения кривых, экстремальные прогибы u_x земной поверхности и экстремальные нормальные напряжения σ_{yy} имеют место при y=–0,4R, а максимальное горизонтальное смещение u_y – при y=0,8R (σ_{yy} здесь равно нулю). С увеличением $|y|$ перемещения и напряжения быстро затухают, и при $|y|$=3,2R динамическое воздействие нагрузки на земную поверхность практически неощутимо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пожуев В.И. Действия подвижной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. – № 6. – С. 58–61.
2. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Известия АН КазССР. 3. Сер. физ.-матем. – 1986. – № 5. – С. 75–80.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. Украинец В.Н. Реакция упругого полупространства на бегущую вдоль оси периодическую нагрузку // Математический журнал. Алматы. – 2005. – № 3. – С. 96–102.

Поступила 05.06.2006 г.

УДК 624(007.2:57.085)